УДК 517.911, 517.968

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ. Часть 4

©А.И. Булгаков, Е.В. Корчагина, О.В. Филиппова

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; импульсные воздействия; выпуклость по переключению значений (разложимость).

Сформулировано определение квазирешения функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями, и изучены его свойства. Получены достаточные условия выполнения принципа плотности и «бэнг-бэнг» принципа для этих включений.

Определение 1. Будем говорить, что функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, имеющая представление (9) в части 2, в котором $y(a) = x_0$, *является квазирешением задачи* (1)-(3) части 3, если найдется такая последовательность $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1,2,...$, что для каждой функции x_i, $i = 1,2,...$ найдется функция $q_i \in \Phi(y)$, для которой при любом $t \in [a,b]$ имеет место равенство

$$x_i(t) = \int_a^t q_i(s)ds + x_0 + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x_i(t_k)), \tag{1}$$

где $\Delta(x_i(t_k))$ удовлетворяет равенству (2) части 3, и $x_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Пусть $\mathcal{H}(x_0)-$ множество всех квазирешений задачи (1)-(3).

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \overline{\text{co}}\Phi(x), \quad \Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)),\ k = 1,...,m, \quad x(a) = x_0. \tag{2}$$

Пусть $H_{\text{co}}(x_0,\tau)-$ множество всех решений задачи (2) на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$.

Теорема 1. *Справедливо равенство* $\mathcal{H}(x_0) = H_{\text{co}}(x_0,\tau)$.

Доказательство. Вначале докажем вложение

$$\mathcal{H}(x_0) \subset H_{\text{co}}(x_0,\tau). \tag{3}$$

Пусть $y \in \mathcal{H}(x_0)$ и пусть $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ имеет представление (9) части 3, в котором $y(a) = x_0$. Тогда, согласно определению квазирешения задачи (1)-(3) части 3 найдется такая последовательность $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1,2,...$, что для каждой функции x_i, $i = 1,2,...$ найдется функция $q_i \in \Phi(y)$, для которой при любом $t \in [a,b]$ имеет место равенство (1). Так как $x_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$, а отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$ непрерывны, то при любом $t \in [a,b]$ справедливо равенство

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x_i(t_k)) = \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)). \tag{4}$$

Из равенства (4) следует, что при любом $t \in [a,b]$ имеет место соотношение

$$\lim_{i\to\infty} \int_a^t q_i(s)ds = \int_a^t \widetilde{q}(s)ds, \tag{5}$$

где для каждого $i = 1, 2, ...$ функция $q_i \in \Phi(y)$ удовлетворяет представлению (1), а функция $\widetilde{q}$ удовлетворяет равенству (9) части 3, в котором $y(a) = x_0$.

Далее покажем, что $q_i \to \widetilde{q}$ слабо в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Так как множество $\Phi(y)$ ограничено суммируемой функцией, то достаточно показать, что для каждого измеримого по Лебегу множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ имеет место равенство

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\mathcal{U}} q_i(s)ds = \int_{\mathcal{U}} \widetilde{q}(s)ds. \tag{6}$$

Докажем равенство (6). Из аддитивности интеграла и равенства (5) следует, что для любых $t, \tau \in [a, b]$ справедливо соотношение

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\tau}^{t} q_i(s)ds = \int_{\tau}^{t} \widetilde{q}(s)ds. \tag{7}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть функция $\beta \in \mathbf{L}_+^1[a, b]$ такова, что при любых $z \in \Phi(y)$ и при почти всех $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|z(t)| \le \beta(t). \tag{8}$$

Не уменьшая общности далее будем считать, что и функция $\widetilde{q}$ из представления (9) удовлетворяет неравенству (8). Далее, пусть $\delta > 0$ таково, что при всех измеримых множествах $\mathcal{E} \subset [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $\mu(\mathcal{E}) < \delta$, выполняется неравенство

$$\int_{\mathcal{E}} \beta(s)ds < \varepsilon. \tag{9}$$

Далее пусть $\mathcal{U} \subset (a, b)-$ измеримое множество и $\widetilde{\mathcal{U}} \subset (a, b)-$ такое открытое множество, что $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{U}}$ и $\mu(\widetilde{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}) < \delta$. Далее пусть

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) = \widetilde{\mathcal{U}}_1 \bigcup \widetilde{\mathcal{U}}_2,$$

где (a_i, b_i), $i = 1, 2, ...-$ составляющие открытые интервалы множества $\mathcal{U} \subset (a, b)$,

$$\widetilde{\mathcal{U}}_1 = \bigcup_{i=1}^{p} (a_i, b_i), \qquad \widetilde{\mathcal{U}}_2 = \bigcup_{i=p+1}^{\infty} (a_i, b_i),$$

причем p выбрано так, что

$$\mu(\widetilde{\mathcal{U}}_2) < \delta. \tag{10}$$

В силу равенства (7) выберем $N = 1, 2, ...$ таким, что при всех $i \ge N$ выполняется неравенство

$$\Big| \int_{\widetilde{\mathcal{U}}_1} q_i(s)ds - \int_{\widetilde{\mathcal{U}}_1} q(s)ds \Big| < \varepsilon. \tag{11}$$

Так как для любого $i = 1, 2, ...$ справедливо равенство

$$\int_{\mathcal{U}} (q_i(s) - q(s))ds = \int_{\widetilde{\mathcal{U}}} (q_i(s) - q(s))ds - \int_{\widetilde{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}} (q_i(s) - q(s))ds,$$

то для любого $i = 1, 2, ...$ справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_{\mathcal{U}}(q_i(s)-q(s))ds\Big| \le \Big|\int\limits_{\widetilde{\mathcal{U}}_1}(q_i(s)-q(s))ds\Big| + \Big|\int\limits_{\widetilde{\mathcal{U}}_2}(q_i(s)-q(s))ds\Big| + \\ + \Big|\int\limits_{\widetilde{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}}(q_i(s)-q(s))ds\Big|.$$

Так как для функции $\beta \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ выполняется неравенство (8), то получаем оценку

$$\Big|\int\limits_{\mathcal{U}}(q_i(s)-q(s))ds\Big| \le \Big|\int\limits_{\widetilde{\mathcal{U}}_1}(q_i(s)-q(s))ds\Big| + 2\int\limits_{\widetilde{\mathcal{U}}_2}\beta(s)ds + 2\int\limits_{\widetilde{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}}\beta(s)ds.$$

Отсюда в силу неравенств (9),(11) для любого $i \ge N$ получаем оценку

$$\Big|\int\limits_{\mathcal{U}}(q_i(s)-q(s))ds\Big| < 5\varepsilon.$$

Таким образом для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ справедливо равенство (6). Следовательно, $q_i \to q$ слабо в пространстве $\mathbf{L}^n_1[a,b]$ при $i \to \infty$. Так как выпуклое замкнутое множество пространства замкнуто и в слабой топологии этого пространства (см. [5]), то из включения $q_i \in \overline{\text{co}}\Phi(y)$ вытекает включение $q \in \overline{\text{co}}\Phi(y)$. А это означает, что функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, представимая в виде (9), является решением задачи (2), то есть $y \in H_{\text{co}}(x_0,b)$. Следовательно, включение (3) справедливо.

Теперь докажем вложение

$$H_{\text{co}}(x_0,\tau) \subset \mathcal{H}(x_0). \tag{12}$$

Пусть $y \in H_{\text{co}}(x_0,b)$. Тогда функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ представима в виде равенства (9) части 3, причем функция $q \in \overline{\text{co}}\Phi(y)$, $y(a) = x_0$. Так как множество $\Phi(y) \in S(\mathbf{L}^n_1[a,b])$, то для функции q найдется такая последовательность $q_i \in \Phi(y)$, $i = 1, 2, ...,$ что $q_i \to q$ слабо в пространстве $\mathbf{L}^n_1[a,b]$ при $i \to \infty$ (см. [5]). Далее, определим последовательность $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1, 2, ...,$ равенством (1). Так как $q_i \to q$ слабо в пространстве $\mathbf{L}^n_1[a,b]$ при $i \to \infty$, то

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_a^t q_i(s)ds = \int\limits_a^t q(s)ds$$

равномерен относительно $t \in [a,b]$. Поэтому в силу непрерывности отображений $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, получим равенство

$$\lim_{i\to\infty}\|x_i - y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = 0.$$

А это означает, что $y \in \mathcal{H}(x_0)$. Таким образом справедливо вложение (12). Из соотношений (3), (12) следует равенство $\mathcal{H}(x_0) = H_{\text{co}}(x_0,\tau)$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$ и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ *обладают свойством* $\mathcal{B}$, если выполняется свойство $(\Gamma^{0,0,0}; \widetilde{I}_k, k = 1, 2, ..., m)$, а задача

$$\dot{y} = \Gamma y, \quad y(a) = 0 \tag{13}$$

на каждом отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$ имеет только нулевое решение, где отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет неравенству (8) части 3.

Т е о р е м а 2. *Пусть множество всех локальных решений задачи* (2) *априорно ограничено. Далее, пусть импульсные воздействия* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$ *и отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a, b])$ *обладают свойством* $\mathcal{B}$. *Тогда* $H(x_0, b) \neq \varnothing$ *и справедливо равенство*

$$\overline{H(x_0, b)} = H_{\text{co}}(x_0, b), \tag{14}$$

где $\overline{H(x_0, b)}$– *замыкание множества* $H(x_0, b)$ *в пространстве* $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как задача (2) априорно ограничена, то априорно ограничена и задача (1)-(3) части 3. Поэтому множество $H(x_0, b) \neq \varnothing$.

Далее докажем равенство (14). Так как отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a, b])$ удовлетворяет неравенству (6) части 3, то отображение $\Phi_{\text{co}} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega[S(\mathbf{L}_1^n[a, b])]$, заданное равенством

$$\Phi_{\text{co}}(x) = \overline{\text{co}}\Phi(x), \tag{15}$$

непрерывно по Хаусдорфу. Поэтому множество $H_{\text{co}}(x_0, b)$ замкнуто в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ и является компактом, содержащимся в некотором выпуклом компакте пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, который отображение $\Phi_{\text{co}} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega[S(\mathbf{L}_1^n[a, b])]$, определенное равенством (15), переводит этот выпуклый компакт в себя. Из этого свойства вытекает вложение

$$\overline{H(x_0, b)} \subset H_{\text{co}}(x_0, b). \tag{16}$$

Теперь докажем включение

$$H_{\text{co}}(x_0, b) \subset \overline{H(x_0, b)}. \tag{17}$$

Пусть $y \in H_{\text{co}}(x_0, b)$. Это означает, что найдется такое $\widetilde{q} \in \overline{\text{co}}\Phi(y)$, что функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ представима в виде (9), в котором $y(a) = x_0$. В силу теоремы 1 $y \in \mathcal{H}(x_0)$. Поэтому найдется такая последовательность $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, $i = 1, 2, ...,$ что для каждой функции $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, $i = 1, 2, ...,$ найдется функция $q_i \in \Phi(y)$, для которой при любом $t \in [a, b]$ имеет место равенство (9) и $x_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ при $i \to \infty$.

Далее, из неравенства (6) для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ и для любого $i = 1, 2, ...$ вытекает соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[q_i; \Phi(x_i)] \leq h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi(y); \Phi(x_i)] \leq \int\limits_{\mathcal{U}} \Gamma(Z(x_i - y))(s)ds.$$

Далее, для любого $i = 1, 2, ...$ рассмотрим мажорантную задачу

$$\begin{gathered} \dot{z} = \Gamma(Z(x_i - y)) + \tfrac{1}{i} + \Gamma(z), \\ \Delta z(t_k) = \widetilde{I}_k(z(t_k)), k = 1, 2, ..., m, \\ z(a) = 0, \end{gathered} \tag{18}$$

где отображение $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a, b] \to \mathbf{L}_+^1[a, b]$ удовлетворяет оценке (8). Так как $\Gamma(Z(x_i - y)) \to 0$ при $i \to \infty$, а предельная задача априорно ограничена, то при всех достаточно больших $i = 1, 2, ...$ задача (18) имеет верхнее решение. Не уменьшая общности будем считать, что при всех $i = 1, 2, ...$ задача (18) имеет верхнее решение. Обозначим это верхнее решение $\xi_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$. Тогда для каждого $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, $i = 1, 2, ...,$ найдется такое решение $z_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ задачи (1)-(3), что при любом $t \in [a, b]$ имеет место оценка

$$|z_i t - x_i(t)| \leq \xi_i(t). \tag{19}$$

Поскольку $\Gamma(Z(x_i - y)) + \frac{1}{i} \to 0$ при $i \to \infty$, то $\xi_i \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому из оценки (19) следует, что

$$\lim_{i \to \infty} \|z_i - x_i\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]} = 0. \tag{20}$$

Из равенства (20) вытекает, что $z_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$. А это означает, что $y \in \overline{H(x_0,b)}$. Таким образом, включение (17) доказано. Из соотношений (16), (17) вытекает равенство (14). Теорема доказана.

Таким образом, теорема 2 дает достаточные условия выполнения принципа плотности (см. [1]) для задачи (1)-(3). Равенство (14) можно усилить следующим образом.

Пусть отображение $F : [a,b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ обладает следующим свойством: при каждом фиксированном $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ отображение $F(\cdot,x)$ измеримо и удовлетворяет равенству

$$\Phi(x) = \{y \in \mathbf{L}_1^n[a,b] : y(t) \in F(t,x) \text{ при почти всех } t \in [a,b]\}.$$

Такое отображение существует (см. [4]). По аналогии с оператором Немыцкого, будем называть отображение $F : [a,b] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ отображением, порождающим оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$. Далее, отображение $\Phi_{\mathrm{ext}} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ определим равенством

$$\Phi_{\mathrm{ext}}(x) = \{y \in \mathbf{L}_1^n[a,b] : y(t) \in \overline{\mathrm{ext}}(\overline{\mathrm{co}}F(t,x) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}. \qquad (21)$$

Отметим, что при каждом $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество $\Phi_{\mathrm{ext}}(x)$, определенное равенством (21), — минимальное по включению выпуклое по переключению, замкнутое в пространстве $\mathbf{L}_1^n[a,b]$ множество, содержащееся в множестве $\Phi(x)$ и удовлетворяющее условию

$$\overline{\mathrm{co}}(\Phi_{\mathrm{ext}}(x)) = \overline{\mathrm{co}}(\Phi(x)). \qquad (22)$$

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi_{\mathrm{ext}}(x), \quad \Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \ k = 1,...,m, \quad x(a) = x_0. \qquad (23)$$

Пусть $H_{ext}(x_0,\tau)-$ множество всех решений задачи (23) на отрезке $[a,\tau]$ $(\tau \in (a,b])$, а $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}(x_0)-$ множество всех квазирешений задачи (23).

Из равенства (22) и теоремы 1 вытекает

С л е д с т в и е 1. *Справедливо следующее равенство*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}(x_0) = H_{\mathrm{co}}(x_0,b).$$

ЛИТЕРАТУРА

1.*Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. Матем., механика. 2005. № 1. С. 3–20.

2. *Булгаков А. И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 371–379.

3.*Тихонов А. Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 68. № 4. С. 1–25.

4.*Bressan A., Colombo G.* Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia. math. 1988. V. 90. № 1. P. 69–86.

5.*Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

6. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.

7. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.

9. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, Walter de Gruyter. Berlin; New-York, 2001.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 07-01-00305, № 09-01-97503), Министерства образования и науки РФ (программа Развитие научного потенциала высшей школы, проект № 2.1.1/1131), Норвежской Национальной Программы Научных Исследований FUGE (грант PRO 06/02) при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского Комитета по развитию университетской науки и образования(NUFU).

Поступила в редакцию 10 апреля 2009 г.

Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V. Functional-differential inclusions with impulses. Part 4. The concept of quasi-solution to a functional-differential inclusion with impulses is represented. The properties of such solutions are studied. There are also derived sufficient conditions for density principle and bang-bang principle.

Key words: functional-differential inclusion; impulses; convex-valued with respect to switching.